Padberg, Friedhelm:

# Einführung in die Mathematik. Bd. 1: Arithmetik

Heidelberg : Spektrum Akademischer Verl., 1997. – 268 S.
ISBN 3-8274-0199-2

Herbert Henning, Magdeburg

Mit diesem Buch hat F. Padberg den 1. Teil einer Reihe Mathematik Primarstufe vorgelegt, die bereits mit *Einführung in die Mathematik, Bd. 2: Geometrie* (Martin Stein) ihre Fortsetzung gefunden hat.

*Einführung in die Mathematik I – Arithmetik* versteht sich zuallererst als eine, auf die künftige Tätigkeit in der Grundschule speziell zugeschnittene, erste Einführung in die Arithmetik im Rahmen des Grundstudiums für Studierende im Haupt- und Nebenfach Mathematik.

Schwerpunkt des Buches und damit zentrales Thema sind die *natürlichen Zahlen.* Das mündliche und schriftliche Rechnen sowie einige Elemente der Teilbarkeitslehre, die für die Primarstufe relevant sind, und der Zahlentheorie geben Anregungen für vertiefende Studien im Hauptstudium. Das Buch (so betont F. Padberg in der Einleitung) “ist aus mehrfach von uns durchgeführten Vorlesungen mit Übungen im Rahmen der Mathematikausbildung für Primarstufenstudenten an der Universität Bielefeld hervorgegangen” (S. 1). Damit ist es ein Hochschul-Lehrbuch. Die Absicht des Autors ist es dabei, besonders den Nebenfachstudenten den für sie oft schwierigen Zugang zur Mathematik zu erleichtern und sie für die Mathematik stärker zu motivieren. Diesem Anliegen wird dieses Buch auf besondere Art und Weise gerecht. Die Abfolge der Themen in den 7 Kapiteln orientiert sich bewußt nicht allein an einer fachsystematischen Logik. Im Gegensatz (etwa zu F. Padberg: *Didaktik der Arithmetik* oder F. Padberg/R. Danckwerts/M. Stein: *Zahlbereiche – eine Einführung*) werden die natürlichen Zahlen nicht zuerst als Kardinalzahlen oder Ordinalzahlen fundiert. F. Padberg knüpft an Erfahrungen der Studenten im “Gebrauch” der natürlichen Zahlen an und behandelt dabei zuerst sehr kompakt die schriftlichen Rechenverfahren. Dabei steht weniger das formale Kalkül der Verfahren im Vordergrund. Auf eine mehr inhaltliche Begründung wird viel Wert gelegt. Zusätzlich, weil von besonderer Bedeutung für die künftige Tätigkeit in der Primarstufe, werden die schriftlichen Rechenverfahren auch in nichtdezimalen Basen behandelt.

Dieser “naive” Einstieg in die natürlichen Zahlen über anschauliche Beispiele (quasi die Benutzung der natürlichen Zahlen ohne zu fragen “Was sind eigentlich natürliche Zahlen?”) wird auch bei der weiterführenden Untersuchung von Elementen der Teilbarkeitslehre/Zahlentheorie (Kapitel II bis V) beibehalten und erst in Kapitel VI wird mit dem *Kardinalzahlmodell* auf diese und auf die weiterführende Frage “Wie können wir das Rechnen mit natürlichen Zahlen und die Rechengesetze begründen?” eine Antwort gegeben. Als Ergänzung (für Hauptfachstudenten und fürs Hauptstudium) werden dann mit Hilfe des Ordinalzahlmodells (Peano-Axiome) eine verknappte Erweiterung der Vorstellungen von natürlichen Zahlen und ein Ausblick auf Bruchzahlen gegeben.

Ich halte diesen gewählten Aufbau des Buches, das weit mehr als ein buchmäßig aufbereitetes Vorlesungsscript ist, für sehr interessant und auch von besonderer Faßlichkeit. F. Padberg baut schrittweise durch anschauliche Beispiele ein in sich *vernetztes* Begriffssystem auf. Dieses nutzt er konsequent, um das *Kardinalzahlmodell* in seiner ganzen Ausführlichkeit und Komplexität zu erläutern. Dabei greift er in den einzelnen Kapiteln bereits früher eingeführte und erklärte Begriffe auf, vertieft das Begriffsverständnis durch neue Aspekte der Betrachtung. Besonders deutlich wird dies im Kapitel V *Relationen und Funktionen.* Nachdem bereits im Zusammenhang mit *Teilbarkeit und Vielfachenbildung* der Relationsbegriff benutzt wurde, wird in diesem Kapitel der Begriff der *Relation* definiert, Veranschaulichungsmöglichkeiten sowie Eigenschaften von Relationen beispielbezogen behandelt. *Ordnungs-* und *Äquivalenzrelationen* (wichtig für das Kardinalzahlmodell) werden erklärt. Ebenso der Begriff *Abbildung* (besonders bijektive Abbildungen). In diesem Kapitel (und jedes andere Kapitel könnte als exemplarisches Beispiel dafür ausgewählt werden) werden bereits angesprochene Begriffe und Eigenschaften (Relation, Transitivität, Reflexivität, Identivität) in einen umfassenden Kontext gestellt und damit vertieft. Zentrale Begriffe für die folgende Einführung der natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen werden bereitgestellt.

In fast allen Kapiteln, und dies werte ich als einen großen Vorzug, wird vertiefender Rückblick und inhaltliche (vor allem begriffliche) Vorarbeit für nächste Kapitel zum Auswahlkriterium für Inhalte gemacht. Dies halte ich deshalb für besonders erwähnenswert, weil (auch durch die farbliche Hervorhebung der Begriffsbildungen im Text gleichsam als Hinweis auf Wesentliches und Grundlegendes) dadurch auch ein Beitrag zur Entwicklung eines “vernetzten” Denkens bei den Studierenden geleistet werden kann.

Die Verdeutlichung erforderlicher Begriffsbildungen durch anschauliche Beispiele, eine große (bis zu 50) Anzahl von Übungsaufgaben am Schluß eines jeden Kapitels, die in ihrem Anforderungsniveau wohl differenziert sind, sowie Lösungshinweise für Aufgaben zu den einzelnen Kapiteln (Anhang), viele sachbezogene Beispiele mit alternativen Erläuterungen und der Einsatz verschiedener Begründungsebenen (vom anschaulichen Beweisen als Strategie bis zu formalen Beweisführungen, die oft vergleichend gegenübergestellt und kommentiert werden) sind Vorzüge dieses Buches, die hervorzuheben sind.

Der Inhalt des Buches gliedert sich in sieben Kapitel:

I. *Stellenwertsysteme und schriftliche Rechenverfahren* (Stellenwertsysteme, Zählen und Größenvergleich in verschiedenen Basen, schriftliche Rechenverfahren: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Alternativen zu den schriftlichen Verfahren, Aufgaben)

II. *Einige Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation* (Einführung der Teilbarkeitsrelation, Teilbarkeitsrelation und Rechenoperation, Teilbarkeitsrelation als

Ordnungsrelation, Bemerkungen zum Folgerungsbegriff, zur Satzumkehrung und zu aussagenlogischen Verknüpfungen, Aufgaben)

III. *Teilbarkeitsregeln*
(Endstellenregeln, Quersummenregeln, weitere Teilbarkeitsregel, Teilbarkeitsregel und dezimales Stellenwertsystem, Beweis von Sätzen und aussagenlogische Verknüpfungen, Aufgaben)

IV. *Teiler- und Vielfachmengen/Mengenoperationen*
(Teiler und Vielfache, Gemeinsame Teiler und Vielfache, Mengenoperationen mit Teiler- und Vielfachenmengen, Gesetze der Mengenalgebra, Der Euklidische Algorithmus, Aufgaben)

V. *Relationen und Funktionen*
(Relationen in einer Menge, Eigenschaften von Relationen in einer Menge, Funktionen, Eigenschaften von Funktionen, Aufgaben)

VI. *Die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen*
(Aspekte der natürlichen Zahlen, Kardinalzahlen – anschauliche Überlegungen, Kardinalzahlen – Skizze einer mathematischen Fundierung, Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Kleinerrelation, Aufgaben)

VII. *Ergänzungen und Ausblick*
(Die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen, Bruchzahlen, Ausblick-Zahlentheorie/Arithmetik, Aufgaben)

Die sieben Kapitel werden durch ein Verzeichnis der im Text genannten Literatur, einer Liste der wichtigsten Symbole und Bezeichnungen sowie den Lösungshinweisen zu den Aufgaben der Kapitel I bis VII komplettiert.

Exemplarisch sollen Qualität und Vorzüge des Buches anhand dreier ausgewählter Kapitel herausgestellt werden.

Im Kapitel II *Einige Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation* werden die natürlichen Zahlen bezüglich der Relation “ist Teiler von” untersucht. Über Sachsituationen wird die Teilbarkeitsrelation eingeführt und die Summen-, Differenz- und Produktregel behandelt. Diese Regeln werden auf drei Begründungsebenen bewiesen. Von besonderer Bedeutung dabei sind die beispielgebundene Beweisstrategie auf der ikonischen Repräsentationsebene und die beispielbezogene Beweisstrategie auf der Zahlenebene, da diese für die Primarstufe von besonderer Relevanz sind und in enger Beziehung zu dem höchsten Begründungsniveau (Beweis mit Variablennutzung) stehen. Besonders interessant dabei ist die Darstellung aller drei unterschiedlichen Begründungsniveaustufen am Beispiel von Satz 3 (Transitivität) “Für alle natürlichen Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt: Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$”. Diese drei Beweisführungen erleichtern das Verständnis dafür, daß die Teilbarkeitsrelation eine induktive Ordnungsrelation ist (Seite 64–69). Diese Argumentation mit unterschiedlichen Beweisstrategien (Begründungsniveaus) findet sich in anderen Kapiteln wieder und fördert das Beweisverständnis.

Im Kapitel IV *Teiler- und Vielfachenmengen/Mengenoperationen* stehen Teiler- und Vielfachenmengen, gemeinsame Teiler und Vielfache sowie deren Veranschaulichung durch Venndiagramme im Mittelpunkt. Für das Begriffsverständnis *Gemeinsame Teiler und Vielfache* werden vier Sachsituationen zum Ausgangspunkt genommen (Seite 113/114) und zur Begriffsbildung genutzt. Dabei werden Beziehungen zwischen den Sachsituationen aufgedeckt, die die Unterscheidungen zwischen Teiler, größter Teiler, größter gemeinsamer Teiler (analog zu Vielfachen) plausibel machen. Die Begriffsbildung wird dadurch sehr anschaulich und verständlich. Mit Hilfe von Venndiagrammen werden Mengenbeziehungen zwischen Teiler- und Vielfachenmengen aufgezeigt und dabei wichtige Begriffe der Mengenlehre im Kontext von *Teiler- und Vielfachmengen* definiert (Durchschnitt, Teilmenge, Gleichheit von Mengen, Vereinigungsmenge, Differenzmenge). Mit Beispielen (u. a. Veranschaulichungen durch Venndiagramme) werden die Mengenoperationen plausibel. Mit den zuvor bereits thematisierten Junktoren werden eine Reihe von Sätzen zur Teilbarkeitslehre exemplarisch bewiesen. In diesem Kapitel wird abschließend mit einer sehr faßlichen, beispielbezogenen Darstellung des Euklidischen Algorithmus ein Verfahren zum Bestimmen des größten gemeinsamen Teilers (ggT) behandelt und die Vorteile dieses Verfahrens veranschaulicht.

Das Kapitel VI *Die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen* fundiert die natürlichen Zahlen mathematisch durch Konzentration auf den *Kardinalzahlaspekt*. Durch den Kardinalzahlaspekt lassen sich die natürlichen Zahlen besonders gut anschaulich fundieren (besonders aber die Rechenoperationen mit ihnen). Mit dem *Kardinalzahlmodell* wird unter Benutzung der bisher eingeführten Begriffe, Definitionen und (bewiesenen) Sätzen die Frage *“Was ist eigentlich eine natürliche Zahl?”* beantwortet.

Bei den Erläuterungen zu den Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division greift man wiederum auf die in anderen Kapiteln bereits behandelten Inhalte zurück. So wird z.B. die Subtraktion durch Rückgriff auf die Mengenoperation der Differenzmengenbildung behandelt.

Die Darlegungen zur Multiplikation und Division natürlicher Zahlen gehen jeweils auf unterschiedliche Wege der Begriffsbildung ein und benutzen vorher behandelte, vor allem mengentheoretische Betrachtungsweisen. Gerade in diesem Kapitel ist dieses Buch auch eine methodische Hilfe für eine unterrichtsbezogene Sachanalyse des Stoffes. Besonders hervorheben möchte ich die Kapitelabschnitte 2 und 3. Hier zeigt F. Padberg sehr schön, wie das Kardinalzahlmodell durch anschauliche Überlegungen (Seite 178–183) aufgebaut werden kann und wie man die Kardinalzahlen mathematisch fundieren kann. Sehr anschaulich wird gezeigt, daß die Relation *“ist gleichmächtig zu”* reflexiv, symmetrisch und transitiv (Äquivalenzrelation) ist. Dies ist für Hauptfachstudenten durchaus auch fürs Hauptstudium von Interesse.

Besonders gelungen in diesem Kapitel erscheinen mir die Darlegungen zur Division (Seite 211 ff). Sehr nah an der Praxis der Grundschule wird zunächst im Sinne von *Aufteilen* und *Verteilen* die Division sehr anschaulich erklärt. Dabei wird aber auch der Zusammenhang zur Multiplikation hergestellt (Division als Umkehroperation zur Multiplikation). Dadurch wird die Division mit anschaulichen Grundvorstellungen verbunden.

Auch die Thematisierung der *Kleinerrelation* durch Vergleich von Mengen mittels paarweiser Zuordnung und der

Teilmengenbeziehung greift wieder auf bereits behandelten Stoff zurück. Indem die Einführung der Kleinerrelation über die *Addition* favorisiert wird, lassen sich Sätze über die Kleinerrelation besonders einfach beweisen (Seite 223–224).

Insgesamt ist dieses Buch eine exzellente Einführung in die Arithmetik der (natürlichen) Zahlen, sehr praxisnah, sehr faßlich mit einer wohldurchdachten fachlichen Systematik, die das Verstehen von Zusammenhängen durch den Studenten als Primat setzt und sich von anderen Vorgehensweisen unterscheidet. Als einen besonderen Vorzug werte ich, wie auf unterschiedliche Art und Weise Beweistechniken auf differenzierten Begründungsniveaustufen thematisiert werden. Dies scheint besonders für die Entwicklung mathematischen Denkens bei Hauptfachstudenten (mehr noch aber bei Nebenfachstudenten) von besonderer Bedeutung. Hervorzuheben ist insgesamt das Reservoir der Aufgaben, die für Übungen zu einer Vorlesung (wobei das Buch als Grundlage dienen kann) von besonderer Qualität sind.

Die Reihe *"Einführung in die Mathematik"* dürfte ebenso wie die anderen von F. Padberg im Spektrum-Verlag erschienen Bücher "Didaktik der Arithmetik", "Didaktik der Bruchrechnung", "Elementare Zahlentheorie", "Lineare Algebra" und "Zahlbereiche – eine Einführung" (letztere mit H. Kütting bzw. R. Danckwerts und M. Stein) einen breiten Leserkreis finden.

**Autor**
Henning, Herbert, Prof. Dr., Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg.
E-mail: herbert.henning@mathematik.uni-magdeburg.de

# Rezensionen

Im Rezensionsteil des ZDM werden Publikationen von Bedeutung für die Didaktik oder Methodik der Mathematik/Informatik oder Publikationen mit allgemein interessierenden Inhalten von Fachleuten ausführlich rezensiert.

***Hinweise auf relevante Werke oder Angebote von Rezensionen an die Redaktion des ZDM sind willkommen!***

# Book Reviews

New books on mathematics/computer science education as well as books of general interest are reviewed in detail in the review section of ZDM.

***Readers are encouraged to participate in ZDM by offering book reviews and / or proposing books for a review to the editorial office of ZDM.***

Ist die Mathematik frei von WidersprÃ¼chen? Gibt es Wahrheiten jenseits des Beweisbaren? Ist es mÃ¶glich, unser mathematisches Wissen in eine einzige Zahl hineinzucodieren? Die moderne mathematische Logik des zwanzigsten Jahrhunderts gibt verblÃ¼ffende Antworten auf solche Fragen. Das vorliegende Buch entfÃ¼hrt Sie auf eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, hin zu den Grenzen [Show full abstract] der Mathematik. Unter anderem werden die folgenden Themen behandelt: Geschichte der mathematischen Logik, formale Systeme, axiomatische Zahlentheorie und Mengenlehre, Beweistheorie Part of the Logik und Grundlagen der Mathematik book series (LGM). Log in to check access. Buy eBook. EUR 36.99.Â  Algebra Arithmetik Beweis Funktion Geometrie Lehrsatz Mathematik Variable. Bibliographic information. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-322-85530-5. AbeBooks.com: Mathematik erleben, Bd.1, Arithmetik, Geometrie I, Algebra I, Geometrie II und lineare Algebra (9783817114948) by Malle, Horst and a great selection of similar New, Used and Collectible Books available now at great prices.Â  Items related to Mathematik erleben, Bd.1, Arithmetik, Geometrie I, Malle, Horst Mathematik erleben, Bd.1, Arithmetik, Geometrie I, Algebra I, Geometrie II und lineare Algebra. ISBN 13: 9783817114948. Mathematik erleben, Bd.1, Arithmetik, Geometrie I, Algebra I, Geometrie II und lineare Algebra. Malle, Horst. Softcover.